

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
аэрокосмических технологий  
С.С. Негодяев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Методы решения систем линейных алгебраических уравнений
<b>по направлению:</b>	Техническая физика
<b>профиль подготовки:</b>	Техническая физика космических летательных аппаратов Физтех-школа Аэрокосмических Технологий центр образовательных программ ФАКТ
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 60 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: А.А. Кузнецов, преподаватель

Программа обсуждена на заседании центра образовательных программ ФАКТ 02.12.2024

## Аннотация

Дисциплина “Методы решения систем линейных уравнений” посвящена итерационным методам решения систем линейных уравнений. В дисциплине рассматриваются как классические методы, так и методы, применяемые для решения актуальных вычислительных задач. Данная дисциплина является первой ступенью для освоения численных методов. Помимо этого, большинство излагаемых в курсе подходов можно распространить на более общий класс нелинейных задач.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- изучение основных теоретических понятий, концепций и подходов, используемых для точного и численного (итерационного) решения систем линейных уравнений.

#### Задачи дисциплины

- приобретение базовых знаний о системах линейных уравнений;
- освоение современных подходов о точном решении систем и их реализации на персональном компьютере;
- приобретение знаний о связи методов оптимизации и методов решения систем линейных уравнений;
- освоение современных подходов итерационного решения систем линейных уравнений и их реализации на персональном компьютере;
- приобретение навыков программирования на C++, Python, работы с большими данными.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен использовать фундаментальные законы природы и основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями и законами современных естественнонаучных дисциплин в сфере своей профессиональной деятельности
	ОПК-1.2 Использует необходимые физические законы и понимает границы их применимости
ОПК-2 Способен применять методы математического анализа, математического моделирования и оптимизации для решения задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	ОПК-2.1 Знаком с основными методами математического анализа, математического моделирования и оптимизации
	ОПК-2.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-2.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- математические основы аналитического решения систем линейных уравнений, сложность алгоритмов;
- основные подходы итерационных способов решения систем линейных уравнений;
- способы работы с большими данными при решении систем линейных уравнений;
- приемлемость подхода в той или иной задаче.

уметь:

- применять теоретические знания для написания солверов систем линейных уравнений;
- писать солверы систем линейных уравнений на языках C++ и Python;
- оценивать сложность алгоритмов решателей и требуемые вычислительные мощности.

владеть:

- теоретическим и понятийным аппаратом, используемым в науках, связанных с численными методами;
- программными средствами для решения систем линейных уравнений.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Системы линейных уравнений. Аналитические методы. Нормы			4	2
2	Понятие итерационных методов. сходимость метода (линейная, сублинейная, сверхлинейная)			6	3
3	Связь СЛАУ и минимизации квадратичной положительно-определенной формы. Одномерная минимизация. Градиентный спуск			6	3
4	Ускоренный градиентный спуск			28	14
5	Метод минимизации невязок. GMRES			4	2
6	Алгебраический многосеточный метод			4	2
7	Предобуславливание			4	2
8	Переопределенные системы			4	2
Итого часов				60	30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

###### 1. Системы линейных уравнений. Аналитические методы. Нормы

Системы уравнений. Недоопределенные, переопределенные системы, определенные системы. Критерий существования и единственности решения. Метод Гаусса, его сложность, проблематика округления. Метод Гаусса с выделением главного элемента. Метод прогонки, устойчивость метода. Норма вектора, норма матрицы. Примеры. Реализация класса матрицы и класса разреженной матрицы.

###### 2. Понятие итерационных методов. сходимость метода (линейная, сублинейная, сверхлинейная)

Понятие итерационного метода, сходимость метода. Метод простой итерации, условие и скорость сходимости. Метод Якоби, условие и скорость сходимости. Метод Гаусса-Зейделя, условия скорость сходимости. Алгоритм для реализации.

###### 3. Связь СЛАУ и минимизации квадратичной положительно-определенной формы. Одномерная минимизация. Градиентный спуск

Положительно-определенная квадратичная форма, эквивалентность ее минимизации и решения СЛАУ. Градиентный спуск, условие сходимости и скорость сходимости. Выбор шага. Наискорейший градиентный спуск, правило Армихо. Алгоритм для реализации.

#### 4. Ускоренный градиентный спуск

Метод тяжелого шарика, метод Нестерова. Метод сопряженных градиентов подпространство Крылова. Метод сопряженных градиентов как метод минимизации невязки. Сходимость метода сопряженных градиентов, вычислительная сложность, способы ускорения. Условия применимости, способ обобщения на несимметрические матрицы. Алгоритм для реализации. Метод бисопряженных градиентов, Сходимость метода, вычислительная сложность, способы ускорения, алгоритм для реализации. Стабилизированный метод сопряженных градиентов, Сходимость и вычислительная сложность, условия применимости. Алгоритм для реализации.

#### 5. Метод минимизации невязок. GMRES

Общий принцип метода минимизации невязок. Построение базиса Арнольди. Алгоритм GMRES, сходимость метода, рестарты.

#### 6. Алгебраический многосеточный метод

Принцип многосеточного метода. Решение эллиптического одномерного уравнения на равномерной сетке при помощи GAMG. Методы V, W, A.

#### 7. Предобуславливание

Понятие предобуславливания. Предобуславливатель Якоби, Гаусса-Зейделя, SOR, SSOR, SGS, неполное LU разложение предобуславливатель Холецкого, их реализация.

#### 8. Переопределенные системы

Метод наименьших квадратов. Его реализация при помощи QR-разложения, SVD - разложения.

### **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

аудитория, компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, интерактивная доска).

### **6.Перечень рекомендуемой литературы**

#### Основная литература

1. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ [Текст]. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов / Е. Н. Аристова, Н. А. Завьялова, А. И. Лобанов ; М-во образования РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2014 .— 243 с.

Фонд литературы кафедры:

1. Гасников А.В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска. – М.: МФТИ, 2018. - 241 с. 2-е изд
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – Главная редакция физико-математической литературы, 1989.

#### Дополнительная литература

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Пакеты офисного программного обеспечения Microsoft Office (Word, Excel, PowerPoint), C++, Python, интернет-ресурсы.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

В ходе лабораторных работ и домашних заданий (самостоятельной работы) студент совершенствует способность создания программного кода, а также закрепляет теоретические знания.

Самостоятельная работа включает в себя:

- ознакомление с актуальной научной литературой;
- решение задач при выполнении домашних заданий;
- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам, учебной и научной литературе).

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляет преподаватель путём проверки домашних заданий, а также посредством индивидуальных консультаций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Техническая физика  
**профиль подготовки:** Техническая физика космических летательных аппаратов  
Физтех-школа Аэрокосмических Технологий  
центр образовательных программ ФАКТ  
**курс:** 2  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** А.А. Кузнецов, преподаватель

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен использовать фундаментальные законы природы и основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями и законами современных естественнонаучных дисциплин в сфере своей профессиональной деятельности
	ОПК-1.2 Использует необходимые физические законы и понимает границы их применимости
ОПК-2 Способен применять методы математического анализа, математического моделирования и оптимизации для решения задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	ОПК-2.1 Знаком с основными методами математического анализа, математического моделирования и оптимизации
	ОПК-2.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-2.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Методы решения систем линейных алгебраических уравнений» обучающийся должен:

### знать:

- математические основы аналитического решения систем линейных уравнений, сложность алгоритмов;
- основные подходы итерационных способов решения систем линейных уравнений;
- способы работы с большими данными при решении систем линейных уравнений;
- приемлемость подхода в той или иной задаче.

### уметь:

- применять теоретические знания для написания солверов систем линейных уравнений;
- писать солверы систем линейных уравнений на языках C++ и Python;
- оценивать сложность алгоритмов решателей и требуемые вычислительные мощности.

### владеть:

- теоретическим и понятийным аппаратом, используемым в науках, связанных с численными методами;
- программными средствами для решения систем линейных уравнений.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется в форме защиты домашних работ. Итоговая оценка выставляется с учетом выполнения домашних работ и устной беседы по программе курса.

Домашние работы:

Задание № 1

Реализация метода Якоби и Гаусса-Зейделя для решения систем линейных уравнений на языке C++ или Python. Зависимость сходимости от обусловленности системы и ее размера. Сравнение скорости работы методов.

Задание № 2

Реализация метода наискорейшего градиентного спуска и метода сопряженных градиентов на языке C++ или Python. Зависимость сходимости от обусловленности системы и ее размера. Сравнение скорости работы методов.

Задание № 3

Реализация метода Нестерова и метода тяжелого шарика на языке C++ или Python. Зависимость сходимости от обусловленности системы и ее размера. Сравнение скорости работы методов.

Задание № 4

Реализация метода GMRES и метода BSGStab на языке C++ или Python. Зависимость сходимости от обусловленности системы и ее размера. Сравнение скорости работы методов.

Задание № 5

Реализация метода GMRES и метода BSGStab на языке C++ или Python. Зависимость сходимости от обусловленности системы и ее размера. Сравнение скорости работы методов.

Задание № 6

Реализация GAMG для одномерного эллиптического уравнения.

Задание № 7

Реализация метода сопряженных градиентов и предобуславливателей Якоби, LU, Холецкого. Сравнение времени решения систем линейных уравнений и предобусловленной систем линейных уравнений методом сопряженных градиентов.

Задание № 8

Реализация метода наименьших квадратов для переопределенных систем линейных уравнений при помощи QR и SVD разложения.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

Примеры вопросов для дифференцированного зачета:

1. Доказать сходимость градиентного спуска для положительно определенной квадратичной формы.
2. Доказать сходимость метода Якоби для решения невырожденных систем линейных уравнений.
3. Построить метод сопряженных градиентов. Обобщить его на случай невырожденной системы уравнений.
4. Ортогонализация Арнольди. Ортогонализировать заданный базис в трехмерном пространстве.
5. Градиентный спуск, условие и скорость сходимости. Алгоритмы реализации.
6. Методы реализации ускоренного градиентного спуска.
7. Решение эллиптического одномерного уравнения на равномерной сетке при помощи GAMG.
8. Виды предобуславливателей и их реализация.
9. Реализации метода наименьших квадратов.
10. Реализация метода Якоби и Гаусса-Зейделя для решения систем линейных уравнений.

#### **Критерии оценивания**

Оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины, а также по результатам контрольных, самостоятельных работ и тестов;

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при выполнении домашних заданий и ответе на вопросы по программе дисциплины, но допускает при этом небольшие неточности;

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, демонстрирует умение применять полученные знания на практике при выполнении домашних заданий, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал экзаменационного билета, по существу излагает его, демонстрирует умение применять полученные знания на практике при выполнении домашних заданий, но допускает в ответе или в решении задач много неточностей;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал экзаменационного билета, излагает его, демонстрирует умение применять полученные знания на практике при выполнении домашних заданий, не допускает в ответе грубых ошибок;



оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, если во время ответа, при выполнении домашних заданий он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, если во время ответа, при выполнении домашних заданий он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2-1)» выставляется студенту, если во время ответа он показал, что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач или не выполнил какое-либо из домашних заданий.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного дифференцированного зачёта обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения дифференцированного зачёта при подготовке ответов на билеты, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины и не могут пользоваться конспектами и любой другой литературой.

Во время проведения дифференцированного зачёта при ответе обучающегося на вопросы по билету или по программе дисциплины, он не может пользоваться конспектами и любой другой литературой.